Domácí úkol ze cvičení 6:

1. Vypočítejte limity (nebo ukažte, že daná posloupnost limitu nemá):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + n^4}{n^2 + n!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + n!}{n^4 + 4(n+1)!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n + \sin(n!) + n!}{n^3 + 2n!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 + (-1)^n n!}{3n!}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+....+n}{n^2}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+1}\right)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$ a pak $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n - 2n!}{n^4 + 3n^n}$.

2. Užití věty o „četnících":

a) Spočítejte limitu $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + ... + \frac{1}{n^2+n} \right)$.

b) Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+\sqrt{1}} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + ... \frac{1}{n+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}} \right) = 1$.

3. Víte-li, že $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, vypočítejte limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

A dobrovolně si můžete promyslet (aplikace věty o limitě monotónní posloupnosti):

a) Definujme rekurentně posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$. Ukažte, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$.
(Návod: ukažte, že daná posloupnost je klesající, zdola omezená)

b) Ukažte, že platí : je-li $0 \le a_n$, pak posloupnost $\{ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \}$ konverguje nebo diverguje k $+\infty$.

c) Ukažte, že platí: Je-li $0 \le a_n \le b_n , n \in N$, potom, konverguje-li posloupnost $\{ \sum\limits_{n=1}^{N} b_n \}$, pak také konverguje posloupnost $\{ \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \}$.

d) Ukažte, že konvergují posloupnosti

(i) $\{ \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n.2^n} \}$; (ii) $\{ \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \}$.

(Návod: lze užít c) a to, co víte o geometrické řadě.)